

10 可算無限と非可算無限

離散数学第10回講義

離散数学10

3

10.1 $\mathbb{R}$ の非可算無限性

定理1.1.5: 実数全体 $\mathbb{R}$ は非可算無限 ($|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$)

証明) $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ が非可算無限であることを示す。(定理1.1.4の対偶を示す)

実数の性質: $\forall x \in \mathbb{R}$ は無限小数として一意に表せる.

例) $1 = 0.999999\ldots$
 $\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$
 辺々3倍すると
 $1 = 0.999999\ldots$

$0 < x \leq 1$ であるから, $\forall x \in S$ は $0.x \times \times \times \cdots$ と表せる.

離散数学10

4

定理1.1.5 の証明(背理法)

$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$ が可算であると仮定すると,

$S = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ と表すことができるから,

$x_0 = 0.a_{00} a_{01} a_{02} \dots$

$x_1 = 0.a_{10} a_{11} a_{12} \dots$

$x_2 = 0.a_{20} a_{21} a_{22} \dots$

$\vdots$

のように書き並べることができる.

ここで, $y = 0.b_0 b_1 b_2 \dots$ を以下のように定義する.

$$b_k = \begin{cases} 1 & (a_{kk} \neq 1) \\ 2 & (a_{kk} = 1) \end{cases} \quad y = 0. \begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \text{※} & \text{※} & \text{※} & \cdots \\ a_{00} & a_{11} & a_{22} & \cdots \end{matrix}$$

$\forall i \in \mathbb{N}, y \neq x_i$ であるから, $y \notin S$
 一方, $0 < y \leq 1$ であるから, $y \in S$ } 矛盾!!

離散数学10

6

定理1.1.5 の証明(背理法)

$\mathbb{R}$ の部分集合 $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$ は非可算

定理1.1.4: 可算集合の部分集合は可算集合

A : 可算 $\Rightarrow \forall B \subseteq A$: 可算

(対偶) $\exists B \subseteq A$: 非可算 $\Rightarrow A$: 非可算

$\therefore \mathbb{R}$ は非可算 ($|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$)

注: $\mathbb{R}$ の基数を $\aleph$ で表す

$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0 < ? < \aleph < \cdots ?$

離散数学10

8

10.2 べき集合の基数

定理1.1.6: $\forall S$: 集合, $|S| < |2^S|$

$$|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}| < |2^{2^{\mathbb{N}}}| < |2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}| < \cdots$$

証明) 示すべきこと (1) $|S| \leq |2^S|$ (2) $|S| \neq |2^S|$

(1) $T = \{\{x\} \mid x \in S\}$ とすると, $T \subseteq 2^S$

$f: S \rightarrow T$

$f: x \mapsto \{x\}$

$S = \{1, 2, 3\}$

$T = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

なる関数 f は明らかに S から T への1対1対応

$\therefore |S| = |T| \leq |2^S|$

離散数学10

9

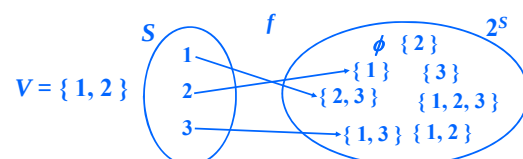
10.2 べき集合の基数(続き)

(2) $|S| \neq |2^S|$ (S から 2^S への1対1対応は存在しない)

背理法で示す.

仮定 $\exists f: S \rightarrow 2^S$, 1対1対応

$V = \{x \mid x \in S, x \notin f(x)\}$ なる集合 V を考えると...



離散数学10

10

10.2 ベキ集合の基数(続き)

(2) $|S| \neq |2^S|$ (S から 2^S への1対1対応は存在しない)

背理法で示す.

仮定 $\exists f: S \rightarrow 2^S$, 1対1対応

$V = \{x \mid x \in S, x \notin f(x)\}$ なる集合 V を考えると...

$V \subseteq S$ ($V \in 2^S$)

f は1対1対応だから, $\exists a \in S$ s.t. $f(a) = V$

- (i) $a \in V$ とすると, V の定義より, $a \notin f(a) = V$ } 矛盾!
 (ii) $a \notin V$ とすると, V の定義より, $a \in f(a) = V$

11 数学的帰納法

離散数学第10回講義

11.1 数学的帰納法の原理

$P(n)$: 自然数 n に関する命題

例) $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$x^n + y^n = z^n$ を満たす整数 x, y, z が存在する

数学的帰納法とは,

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つことを示す

「 $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ 」が真であることを示す

のに極めて有効な証明方法

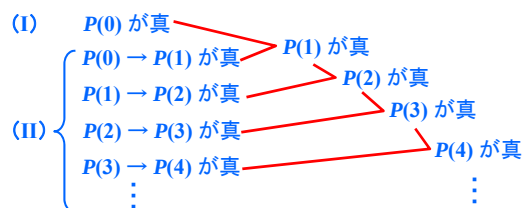
数学的帰納法 (mathematical induction)

(I) $P(0)$ (が真であることを示す) ← 帰納法の基礎

(II) $\forall n \in \mathbb{N}, [P(n) \rightarrow P(n+1)]$ (が真であることを示す)

帰納法の仮定

帰納の段階



数学的帰納法の正しさ

$S = \{n \mid n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ が真}\}$ とする

(I) $P(0)$ が真 $\iff 0 \in S$
 $\emptyset \in \mathbb{N}$

(II) $[P(n) \rightarrow P(n+1)] \iff n \in S \Rightarrow n+1 \in S$
 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{N}$

(I), (II)を示すことは, $S = \mathbb{N}$ を示すことに他ならない!