

11 数学的帰納法

離散数学第11回講義

離散数学11

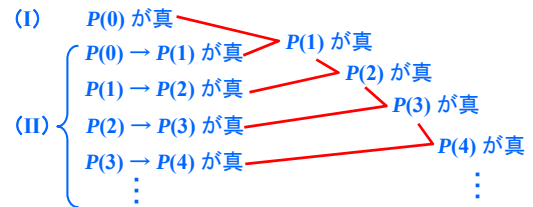
1

数学的帰納法 (mathematical induction)

(I) $P(0)$ (が真であることを示す)

(II) $\forall n \in \mathbb{N}, [P(n) \rightarrow P(n+1)]$ (が真であることを示す)

帰納法の仮定



離散数学11

2

11.2 数学的帰納法の証明例

例1) $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (*)

(I) $n=0$ のとき, 左辺 = 0, 右辺 = $0(0+1)/2 = 0$.
O.K.

(II) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, (*) が成り立つと仮定する.

$n+1$ のとき,

$$\begin{aligned} 0+1+\dots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2} \\ &\text{よって, } n+1 \text{ のときも O.K.} \end{aligned}$$

離散数学11

3

11.2 数学的帰納法の証明例 (続き)

例2) すべての猫は同じ顔 ($x \equiv y : x$ と y は同じ顔)

猫の匹数 $n (\geq 1)$ に関する帰納法で証明

$n=1$ のとき



$n=1$ のときは O.K.

離散数学11

4

11.2 数学的帰納法の証明例 (続き)

例2) すべての猫は同じ顔 ($x \equiv y : x$ と y は同じ顔)

$n+1$ 匹のとき 帰納法の仮定: 「 n 匹の猫は同じ顔」



離散数学11

5

11.3 累積帰納法 (完全帰納法)

(I) $P(0)$

帰納法の仮定

(II) $\forall n \in \mathbb{N}, [P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)]$

n 以下のすべての自然数で成り立つと仮定して
 $n+1$ のときを証明する.

累積帰納法の正しさ:

(累)で証明可 $\longleftrightarrow$ (帰)で証明可

(累)で証明可 $\longleftarrow$ (帰)で証明可 は明らか

離散数学11

7

累積帰納法の正しさ

(II) $\forall n \in \mathbb{N}, [P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)]$

⑩で証明可 $\rightarrow$ ⑨で証明可?

$Q(n) = P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)$ とおく

⑩で証明可 $\rightarrow Q(n) \rightarrow P(n+1)$ が証明可

$\rightarrow Q(n) \rightarrow Q(n) \wedge P(n+1)$

$\rightarrow Q(n) \rightarrow P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n+1)$

$\rightarrow Q(n) \rightarrow Q(n+1)$

$\rightarrow$ ⑨で証明可

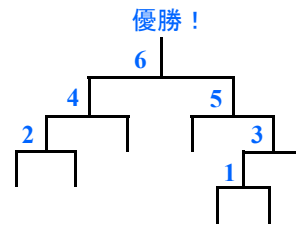
離散数学11

8

累積帰納法の証明例

$M(n)$: n チームが参加するトーナメントの試合数

$$M(n) = n - 1$$



(I) $n = 1$ のとき,
左辺 = $M(1) = 0$
右辺 = $1 - 1 = 0$
O.K.

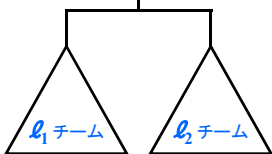
離散数学11

10

累積帰納法の証明例(続き)

$$M(n) = n - 1$$

決勝戦



(II) $n + 1$ チームのとき,
 $l_1 + l_2 = n + 1$
 $1 \leq l_1 \leq n, 1 \leq l_2 \leq n$

累積帰納法の仮定より,

$$M(l_1) = l_1 - 1$$

$$M(l_2) = l_2 - 1$$

$$M(n+1) = M(l_1) + M(l_2) + \boxed{1} = l_1 - 1 + l_2 - 1 + 1 = n$$

決勝戦

O.K.

離散数学11

11