

13 差分方程式(1)

離散数学第13回講義

離散数学13

5

13.2 差分方程式の解法

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = h(n) \quad (*)$$

の右辺 = 0 とおいた式(同次式)

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

(*)の一般解 = (**)の一般解 + (*)の1つの特殊解
(同次解)



k 個の初期値

初期値問題の解(特殊解)

離散数学13

6

13.2.1 同次解の性質(1)

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

(1) $g(n) : (**) \text{の解} \Rightarrow Ag(n) : (**) \text{の解}$
(A は任意定数)

仮定より

$$C_0 g(n) + C_1 g(n-1) + \cdots + C_k g(n-k) = 0$$

辺々 A 倍すると

$$C_0 Ag(n) + C_1 Ag(n-1) + \cdots + C_k Ag(n-k) = 0$$

$\therefore Ag(n)$ は (**) の解

離散数学13

7

13.2.1 同次解の性質(2)

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

(2) $g_1(n), g_2(n) : (**) \text{の解} \Rightarrow g_1(n) + g_2(n) : (**) \text{の解}$

仮定より

$$C_0 g_1(n) + C_1 g_1(n-1) + \cdots + C_k g_1(n-k) = 0$$

$$C_0 g_2(n) + C_1 g_2(n-1) + \cdots + C_k g_2(n-k) = 0$$

辺々足し合わせると

$$C_0 \{g_1(n) + g_2(n)\} + C_1 \{g_1(n-1) + g_2(n-1)\} + \cdots + C_k \{g_1(n-k) + g_2(n-k)\} = 0$$

$\therefore g_1(n) + g_2(n)$ は (**) の解

離散数学13

8

13.2.2 (*)の一般解

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = h(n) \quad (*)$$

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

$g_1(n) : (*) \text{の特殊解}$
 $g_2(n) : (**) \text{の一般解}$ } $\Rightarrow g_1(n) + g_2(n) : (*) \text{の一般解}$

仮定より $C_0 g_1(n) + C_1 g_1(n-1) + \cdots + C_k g_1(n-k) = h(n)$

$$C_0 g_2(n) + C_1 g_2(n-1) + \cdots + C_k g_2(n-k) = 0$$

辺々足し合わせると

$$C_0 \{g_1(n) + g_2(n)\} + C_1 \{g_1(n-1) + g_2(n-1)\} + \cdots + C_k \{g_1(n-k) + g_2(n-k)\} = h(n)$$

$\therefore g_1(n) + g_2(n)$ は (*) の解

離散数学13

9

13.2.3 (**)の一般解の求め方

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

基本方針: $f(n) = \alpha^n$ において (**) に代入し, α を求める

$f(n) = \alpha^n$ において (**) に代入

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + \cdots + C_k \alpha^{n-k} = 0 \quad (+)$$

辺々 α^{n-k} で割ると

$$C_0 \alpha^k + C_1 \alpha^{k-1} + \cdots + C_k = 0 \quad (++)$$

(**) の特性方程式

離散数学13

10

特性方程式の解がすべて異なる場合

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \dots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

$$C_0 \alpha^k + C_1 \alpha^{k-1} + \dots + C_k = 0 \quad (\text{特性方程式}) \quad (++)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$: (++) の異なる解

$$f(n) = \alpha_1^n, f(n) = \alpha_2^n, \dots, f(n) = \alpha_k^n$$

はすべて (**) の解

同次解の性質 (1), (2) より

$$f(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_k \alpha_k^n$$

は (**) の解 (一般解), (各 A_i は任意定数)

離散数学13

11

特性方程式が m 重解をもつ場合

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \dots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + \dots + C_k \alpha^{n-k} = 0 \quad (+)$$

$$C_0 \alpha^k + C_1 \alpha^{k-1} + \dots + C_k = 0 \quad (\text{特性方程式}) \quad (++)$$

$$\alpha_i: (++) \text{ の } m \text{ 重解} \quad C_0 (\alpha - \alpha_i)^m (\dots) = 0$$

$$f(n) = n^\ell \alpha_i^n \quad (0 \leq \ell \leq m-1) \text{ は } (**) \text{ の解}$$

$$\ell=0 \text{ のとき, } f(n) = \alpha_i^n \text{ は } (**) \text{ の解}$$

(+) の両辺を α で微分

$$C_0 n \alpha^{n-1} + C_1 (n-1) \alpha^{n-2} + \dots + C_k (n-k) \alpha^{n-k-1} = 0 \quad (\#)$$

$$\alpha_i: (++) \text{ の } m \text{ 重解} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i: (+) \text{ の } m \text{ 重解}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i: (\#) \text{ の } m-1 \text{ 重解}$$

離散数学13

12

特性方程式が m 重解をもつ場合

$$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \dots + C_k f(n-k) = 0 \quad (**)$$

$$C_0 n \alpha^{n-1} + C_1 (n-1) \alpha^{n-2} + \dots + C_k (n-k) \alpha^{n-k-1} = 0 \quad (\#)$$

α_i は (#) の $m-1$ 重解であるから

$$C_0 n \alpha_i^{n-1} + C_1 (n-1) \alpha_i^{n-2} + \dots + C_k (n-k) \alpha_i^{n-k-1} = 0$$

辺々 α_i 倍すると

$$C_0 n \alpha_i^n + C_1 (n-1) \alpha_i^{n-1} + \dots + C_k (n-k) \alpha_i^{n-k} = 0$$

$\therefore f(n) = n \alpha_i^n$ は (**) の解

同様の議論を $m-2$ 回繰り返す

$$f(n) = n^\ell \alpha_i^n \quad (0 \leq \ell \leq m-1) \text{ は } (**) \text{ の解}$$

$\therefore f(n) = (A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \dots + A_m) \alpha_i^n$ は (**) の解

離散数学13

13

同次方程式の解法例 (1)

例1) フィボナッチ数列

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad (*)$$

$$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0$$

特性方程式は

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$f(0) = f(1) = 1$ なる特殊解を求めよ

$$\begin{cases} f(0) = A_1 + A_2 = 1 \\ f(1) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1, A_2 \text{ を求める}$$

よって (*) の一般解は

$$f(n) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (A_1, A_2 \text{ は任意定数})$$

離散数学13

14

同次方程式の解法例 (2)

例2) 特性方程式が重解をもつ場合

$$4f(n) - 20f(n-1) + 17f(n-2) - 4f(n-3) = 0 \quad (*)$$

特性方程式は

$$4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 17\alpha - 4 = 0$$

$$4\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 (\alpha - 4) = 0$$

よって (*) の一般解は

$$f(n) = \underbrace{(A_1 n + A_2) \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{重解部}} + \underbrace{A_3 4^n}_{\text{単解部}}$$

(A_1, A_2, A_3 は任意定数)

離散数学13

15