13．2　差分方程式の解法

$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = h(n)$　（＊）

の右辺＝0 とおいた式（同次式）

$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = 0$　（**）

（＊）の一般解＝（**）の一般解（同次解）＋（＊）の1つの特殊解

↓ k 個の初期値

初期値問題の解（特殊解）

13．2．3　（＊）の特殊解の求め方

$C_0 f(n) + C_1 f(n-1) + \cdots + C_k f(n-k) = h(n)$　（＊）

$h(n) = (a_0 n^\ell + a_1 n^{\ell-1} + \cdots + a_{\ell-1} n + a_\ell)\cdot\beta^n$

$h(n)$＝（n のℓ次の多項式）×（n の指数関数）のとき

（1）βが特性方程式の解でないとき

$f(n) = (t_0 n^\ell + t_1 n^{\ell-1} + \cdots + t_{\ell-1} n + t_\ell)\cdot\beta^n$

（2）βが特性方程式の m 重解のとき

$f(n) = n^m\cdot(t_0 n^\ell + t_1 n^{\ell-1} + \cdots + t_{\ell-1} n + t_\ell)\cdot\beta^n$

とおいて（＊）に代入し，$t_0, t_1, \ldots, t_\ell$ を決める

$h(n)$ の一般形

特殊解の求め方（1）

例1）$f(n) + 5f(n-1) + 6f(n-2) = 3n^2$　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0 \Rightarrow (\alpha+2)(\alpha+3) = 0$

（＊）の特殊解は　（$\beta=1$ で特性方程式の解でない）

$f(n) = (t_0 n^2 + t_1 n + t_2)1^n = t_0 n^2 + t_1 n + t_2$

とおいて（＊）に代入

$t_0 n^2 + t_1 n + t_2 + 5\{t_0(n-1)^2 + t_1(n-1) + t_2\}$
$+ 6\{t_0(n-2)^2 + t_1(n-2) + t_2\} = 3n^2$

$12t_0 n^2 - (34t_0 - 12t_1)n + (29t_0 - 17t_1 + 12t_2) = 3n^2$

特殊解の求め方（1の続き）

$f(n) + 5f(n-1) + 6f(n-2) = 3n^2$　（＊）

$f(n) = t_0 n^2 + t_1 n + t_2$ とおいて（＊）に代入

$12t_0 n^2 - (34t_0 - 12t_1)n + (29t_0 - 17t_1 + 12t_2) = 3n^2$

$$\begin{cases} 12t_0 = 3 \\ 34t_0 - 12t_1 = 0 \\ 29t_0 - 17t_1 + 12t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{1}{4} \\ t_1 = \frac{17}{24} \\ t_2 = \frac{115}{288} \end{cases}$$

よって求める特殊解は

$$f(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

特殊解の求め方（1の続き）

$f(n) + 5f(n-1) + 6f(n-2) = 3n^2$　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0 \Rightarrow (\alpha+2)(\alpha+3) = 0$

（＊）の同次解は

$f(n) = A_1(-2)^n + A_2(-3)^n$　（A_1, A_2 は任意定数）

（＊）の特殊解は

$f(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

（＊）の一般解は

$f(n) = A_1(-2)^n + A_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

（A_1, A_2 は任意定数）

特殊解の求め方（2，3）

例2）$f(n) + f(n-1) = 3n\cdot 2^n$　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha + 1 = 0$　（$\beta=2$ で特性方程式の解でない）

$f(n) = (t_0 n + t_1)2^n$　とおいて（＊）に代入

例3）$f(n) - 2f(n-1) = 3\cdot 2^n$　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha - 2 = 0$　（$\beta=2$ で特性方程式の1重解）

$f(n) = n^1\cdot(t_0)\cdot 2^n = t_0 n 2^n$　とおいて（＊）に代入

特性方程式の解が1のとき（要注意）

$f(n) - f(n-1) = 7$　　　　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha - 1 = 0$　（$\beta = 1$ で特性方程式の1重解）

$f(n) = n^1 (t_0) 1^n = t_0 n$　とおいて（＊）に代入

$t_0 n - t_0 (n-1) = t_0 = 7$

$\therefore$ 特殊解は $f(n) = 7n$

~~$f(n) = t_0$ とおいて（＊）に代入すると...~~

$\cancel{t_0 - t_0 = 7 \Rightarrow 0 = 7}$

特殊解の求め方（複合形）

例4） $f(n) - 5f(n-1) + 6f(n-2) = 2^n + n$　　（＊）

2^n に対する一般形と n に対する一般形の和を $f(n)$ とおいて代入

同次式の特性方程式は

$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 3) = 0$

2^n に対する一般形 $\Rightarrow n^1 (t_0) 2^n$
（$\beta = 2$ で特性方程式の1重解）

n に対する一般形 $\Rightarrow (t_1 n + t_2) 1^n$
（$\beta = 1$ で特性方程式の解でない）

t の添え字の付け方に注意！

$f(n) = t_0 n 2^n + t_1 n + t_2$ とおいて（＊）に代入

特殊解の求め方（複合形）

例4） $f(n) - 5f(n-1) + 6f(n-2) = 2^n + n$　　（＊）

$f(n) = t_0 n 2^n + t_1 n + t_2$ とおいて（＊）に代入し，
t_0, t_1, t_2 を求めると

$f(n) = -2n2^n + \frac{1}{2} n + \frac{7}{4}$　となる

一方，同次解は

$f(n) = A_1 2^n + A_2 3^n$　であるから

（＊）の一般解は

$f(n) = A_1 2^n + A_2 3^n - 2n2^n + \frac{1}{2} n + \frac{7}{4}$　となる

（A_1, A_2 は任意定数）

ハノイの塔の計算量

例5） $S(n)$: n 枚の円盤を移動させるのに必要なステップ数

$S(n) = S(n-1) + 1 + S(n-1)$

$S(n) - 2S(n-1) = 1$　　　　（＊）

同次式の特性方程式は

$\alpha - 2 = 0$

よって，（＊）の同次解は

$S(n) = A2^n$　（A は任意定数）となる

一方，（＊）の特殊解は $S(n) = t_0$ とおいて（＊）に代入すると

$t_0 - 2t_0 = 1 \Rightarrow t_0 = -1$

$\therefore$ $S(n) = -1$

ハノイの塔の計算量（続き）

例5） $S(n)$: n 枚の円盤を移動させるのに必要なステップ数

$S(n) - 2S(n-1) = 1$　　　　（＊）

（＊）の一般解は

$S(n) = A2^n - 1$　（A は任意定数）となる

また，$S(1) = 1$ であるから（初期値）

$S(1) = A2^1 - 1 = 1$

$\therefore$ $A = 1$

したがって，$S(1) = 1$ を満たす特殊解は

$S(n) = 2^n - 1$　である

引数に分数が出現する場合

例6） $f(n) - 2f(n/2) = n - 1$

$n = 2^m$ と置いて

$g(m) = f(n) = f(2^m)$

に関する差分方程式

$g(m) - 2g(m-1) = 2^m - 1$

を解く.

$g(m) = (m-1)2^m + 1$

$m = \log_2 n$ を使って f を得る.

$f(n) = (\log_2 n - 1) n + 1$　　教科書70ページ