3　命題論理の基礎

離散数学第3回講義

3．0　命題とは

命題（**proposition**）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 真（**true**）または偽（**false**）であることが判定できる文

平叙文

命題定数 $\begin{cases} 1：真であることが分かっている命題 \\ 0：偽であることが分かっている命題 \end{cases}$

命題変数：値として1または0をとる変数

この値のことを真理値という

3．1　基本演算

（1） 論理和（**disjunction**）　　　p, q：命題変数

$p \vee q$：p と q の論理和（選言）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

	p	q	$p \vee q$
解釈	0	0	0
解釈	0	1	1
解釈	1	0	1
解釈	1	1	1

真理値表

「p または q　(p **or** q)」と読む

解釈（**interpretation**）：命題変数への0，1の割り当て

“10<20 ∨ 30<20” は1，“20<10 ∨ 30<20” は0，“1 ∨ 30<20” は1

3．1　基本演算（続き）

（2） 論理積（**conjunction**）

$p \wedge q$：p と q の論理積（連言）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

「p かつ q　(p **and** q)」と読む

“10<20 ∧ 20<30” は1，“10<20 ∧ 30<20” は0，“0 ∧ 20<30” は0

3．1　基本演算（続き）

（3） 否定（**negation**）

$\neg p$：p の否定

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

p	$\neg p$
0	1
1	0

「p でない　(**not** p)」と読む

“¬(10<20)” は0，“¬(30<20)” は1，“¬0” は1

3．2　命題論理式（複合命題）

直観的定義：命題変数に基本演算を有限回適用して得られる式

帰納的定義（**inductive definition**）

（命題）論理式

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
(1) 命題変数は論理式である．
(2) P, Q が論理式のとき，
$(P \vee Q)$，$(P \wedge Q)$，$\neg P$
は論理式である．
(3) (1) と (2) で定義されるものだけが論理式である．

注：一番外側の()は省略可

３．２　論理式(例)

p, q :　命題変数

(1)　p, q は論理式である.

(2)　$(p \lor q)$, $(p \land q)$, $\neg p$, $\neg q$, $(p \lor p)$, $(p \land p)$, ...

$(p \lor q) \lor (p \land q)$, $(p \lor q) \land (p \land q)$, $(p \land q) \lor \neg p$, ...

$((p \lor q) \lor (p \land q)) \lor ((p \lor q) \land (p \land q))$, ...

...

は論理式である.

(3)　$p \lor \land\, q$, ... は論理式ではない.

３．３　論理式の値

真理値表によって求める

$(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$\neg q$	$\neg q \lor p$	$(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1

「論理式 $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$ は, p は真(1), q は偽(0)という解釈の下で偽(0)となる.」などという.

３．４　恒真式と恒偽式

恒真式 (tautology) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての解釈の下で真となる論理式

$p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
0	1	1
1	0	1

恒偽式 (contradiction) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての解釈の下で偽となる論理式

$p \land \neg p$

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
0	1	0
1	0	0

３．５　論理的同値 (logically equivalent)

P, Q : 論理式

$P \equiv Q$: P と Q は論理的に同値である ($P \Leftrightarrow Q$)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての解釈の下で, P と Q の真理値が一致する

$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

p	q	$p \land q$	$\neg(p \land q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \lor \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$\neg(p \land q)$ と $\neg p \lor \neg q$ は見た目は違うが論理的には同じ式