

定義 $\Rightarrow$ definition
 定理 $\Rightarrow$ theorem
 補題(補助定理) $\Rightarrow$ lemma
 系 $\Rightarrow$ corollary

3.1 基本演算

(1) 論理和 (2) 論理積 (3) 否定

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	$\neg p$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

3.5 論理的同値 (logically equivalent)

$P \equiv Q$: P と Q は論理的に同値である ($P \Leftrightarrow Q$)

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ すべての解釈の下で, P と Q の真理値が一致する

4 重要な論理式とその略記法

離散数学第4回講義

「 $0 \leq 1$ かつ $1 \leq 0$ ならば $0 = 1$ 」は正しい?

4.1 $\neg P \vee Q$ (含意式)

P, Q : 論理式

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$P \rightarrow Q$ と略記する

「 P ならば Q 」(if P then Q)

「 P は Q を含意する」(P implies Q)

注1: P (前提) が偽ならば常に「 $P \rightarrow Q$ 」は真

注2: 「 $P \rightarrow Q$ 」が真であることと Q (結論) が真であることは別問題

「 $0 \leq 1 \wedge 1 \leq 0 \rightarrow 0 = 1$ 」は真(正しい)

例1 部分集合の定義

$A \subseteq B \xleftrightarrow{\text{def}}$ A のすべての要素が B の要素である

注2: 空集合 ϕ はすべての集合の部分集合. $\forall A, \phi \subseteq A$??

厳密な定義

$A \subseteq B \xleftrightarrow{\text{def}}$ $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

常に0

$\forall x [x \in \phi \rightarrow x \in B]$

B がどんな集合であろうと常に1

$\therefore$ 任意の集合 B に対して, $\phi \subseteq B$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ の証明例

$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ の証明例

$\forall x [x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$ を示す

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ または $x \in (B \cap C)$ ($\because \cup$ の定義)

① $x \in A$ の場合, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ ($\because \cup$ の定義)

$\therefore x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ($\because \cap$ の定義)

② $x \in (B \cap C)$ の場合, $x \in B$ かつ $x \in C$ ($\because \cap$ の定義)

$\Rightarrow x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ ($\because \cup$ の定義)

$\therefore x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ($\because \cap$ の定義)

いずれの場合も, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

例2 素数の定義

「 $P \rightarrow Q$ 」が真となるのは、 P (前提) が真となるすべての状況で Q (結論) が真となるとき。

$$P = \{ m \mid m \in \mathbb{N}, 2 \leq m, m = ab \text{ ならば } a=1 \text{ または } b=1 \}$$

$$m = ab \rightarrow (a=1 \vee b=1)$$

$m=4$ のとき前提 $a=1, b=4$ ($a=1 \vee b=1$) は真
 が真となるのは $a=4, b=1$ ($a=1 \vee b=1$) は真
 $a=2, b=2$ ($a=1 \vee b=1$) は偽
 $\therefore m = ab \rightarrow (a=1 \vee b=1)$ は偽

離散数学4

10

例3 三段論法の正当性

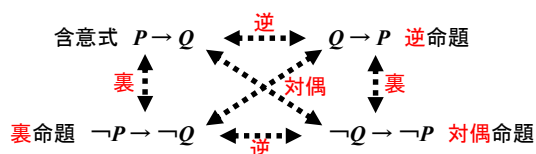
P と $P \rightarrow Q$ がともに真ならば、 Q は真であると結論できる。

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

離散数学4

11

例4 含意式の逆・裏・対偶



P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

離散数学4

12

4.2 $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1

$$P \leftrightarrow Q \quad ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

「 P であるのは Q であるときかつそのときに限る」

(P if and only if Q) などと読む。

注1: P と Q の真理値が一致するときのみ真

注2: 「 $P \leftrightarrow Q$ 」と「 $P \equiv Q$ 」とは別物

離散数学4

13

4.3 論理演算の結合の強さ

$$3 \times 2 + 6 \div 3 - 1 = 7$$

$$\times (\div) \geq + (-)$$

$$\neg \geq \vee, \wedge \geq \rightarrow, \leftrightarrow$$

論理式 $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ は
 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ と書ける

注1: $((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge (Q \wedge R))$

注2: $((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee (Q \vee R))$

注3: $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \not\equiv (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

$\rightarrow$ は結合法則が成り立たない!!

離散数学4

15

4.4 論理的帰結(正しい推論法)

$F_1, F_2, \dots, F_n, G$: 論理式

G : $F_1, F_2, \dots, F_n$ からの論理的帰結

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ $F_1, F_2, \dots, F_n$ のすべてが真となるすべての解釈で G が真となる $F_1, F_2, \dots, F_n \models G$ で表す

$$F_1, F_2, \dots, F_n \models G$$

$\xleftrightarrow{\text{必+}}$ $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G$ が恒真

ちなみに

$$P \equiv Q$$

$\xleftrightarrow{\text{必+}}$ $P \leftrightarrow Q$ が恒真

離散数学4

16