

5.1 述語論理の必要性(1)

前提:「福岡市民は皆ホークスファンである」

前提:「石坂は福岡市民である」

結論:「石坂はホークスファンである」は正しい推論
(論理的帰結)

命題論理で考えると?

P : 福岡市民は皆ホークスファンである

Q : 石坂は福岡市民である

R : 石坂はホークスファンである

$P \wedge Q \rightarrow R$ は恒真ではない

命題論理だけでは論理的に不十分!

離散数学5

3

5.1 述語論理の必要性(2)

$\underbrace{0 \leq 1}_{1} \wedge \underbrace{1 \leq 2}_{1} \rightarrow \underbrace{0 \leq 2}_{1}$ は真
(命題論理の範囲で確認できる)

一般に「 $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$ 」も真

$P \wedge Q \rightarrow R$ は恒真ではない

命題「 $x \leq y$ 」と命題「 $y \leq z$ 」は変数 y を介して関連があり、
独立した命題変数 P, Q として扱うことはできない。



変数を含む命題を扱う枠組みが必要!!

離散数学5

6

5.2 述語による命題の表現

$x \leq y$: x は y よりも小さいか等しい 述語
 $A(x, y)$
2 引数

A/n で A が n 引数述語であることを表す

$F(x)$: x は福岡市民である

$H(x)$: x はホークスファンである

「福岡市民ならばホークスファンである」

$F(x) \rightarrow H(x)$

離散数学5

7

5.3 対象領域

対象領域 D : 変数の取り得る値の集合

$x \leq y$: x は y よりも小さいか等しい

$D = N$ (自然数全体), $D = Z$ (整数全体), ...

$F(x) \rightarrow H(x)$: 福岡市民ならばホークスファンである

D = すべての人からなる集合

※ 文脈や述語から D が明らかな場合は省略可

離散数学5

8

5.4 限量子

$A(x)$: 変数 x を含む述語

$\forall x A(x)$: 全称記号「すべての $x \in D$ について $A(x)$ が真である」

$\exists x A(x)$: 存在記号「 $A(x)$ が真となる $x \in D$ が存在する」

「福岡市民は皆ホークスファンである」

$\forall x (F(x) \rightarrow H(x))$ D = すべての人からなる集合

「 $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$ 」

$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$ $D = N$

離散数学5

9

5.5 述語論理の解釈(1)

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$: 命題論理と同じ

$F(x)$: 変数 x を含む論理式

$D = \{a_1, a_2, \dots\}$

$\forall x F(x)$: すべての $a_i \in D$ について $F(a_i)$ が真であるときに真

$\exists x F(x)$: $F(a_i)$ が真となる $a_i \in D$ が存在するときに真

$D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ のときは,

$\forall x F(x) \equiv F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n)$

$\exists x F(x) \equiv F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n)$

離散数学5

8

述語論理式

直観的定義: 述語に基本演算($\rightarrow$ と $\leftrightarrow$ を含む)を有限回適用して得られる式

述語論理式

- (1) 述語は述語論理式である.
- (2) F, G が述語論理式の時,
 $(F \vee G), (F \wedge G), \neg F, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$
 は述語論理式である.
- (3) F が述語論理式で x が変数のとき,
 $\forall x F, \exists x F$ は述語論理式である.
- (4) (1), (2), (3) で定義されるものだけが述語論理式である.

離散数学5

9

5.5 述語論理の解釈(2)

限量子の順番や領域が変わると意味が変わる

$F(x, y)$: 変数 x, y を含む述語論理式

$\forall x \exists y F(x, y)$: すべての x に対して(それぞれの x に応じて),
 $F(x, y)$ が真となる y が存在する

$\exists y \forall x F(x, y)$: ある特定の y が1個存在して,
 すべての x に対して $F(x, y)$ が真となる

離散数学5

10

5.5 述語論理の解釈(3)

限量子の順番や領域が変わると意味が変わる

$x < y$: x は y より小さい

$D = N$ (自然数全体)

$\forall x \exists y (x < y)$: 真 $\exists y \forall x (x < y)$: 偽
 最大の自然数は存在しない

$\forall x \exists y (y < x)$: 偽 $\exists y \forall x (y < x)$: 偽
 $x = 0$ より小さな自然数 y は存在しない

$D = Z$ (整数全体)

$\forall x \exists y (y < x)$: 真 $\exists y \forall x (y < x)$: 偽
 最小の整数は存在しない

離散数学5

11

5.6 $\forall$ と $\rightarrow$ を組み合わせた論理式(1)

$x < y$: x は y より小さい

$\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow \exists z ((x < z) \wedge (z < y)))$

任意の x, y に対して, $x < y$ ならば $x < z$ かつ $z < y$ となる z が存在する
 $x < y$ となる任意の x, y に対して, $x < z$ かつ $z < y$ となる z が存在する

$D = N$ (自然数全体) のとき偽

$D = Z$ (整数全体) のとき偽

$D = Q$ (有理数全体) のとき真

$D = R$ (実数全体) のとき真

離散数学5

12

5.7 重要な論理的同値関係

$F(x)$: 変数 x を含む論理式 $D = \{a_1, a_2, \dots\}$

$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$ $\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$

$D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ のとき

$\neg \forall x F(x) \equiv \neg (F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n))$
 $\equiv \neg F(a_1) \vee \neg F(a_2) \vee \dots \vee \neg F(a_n)$
 $\equiv \exists x \neg F(x)$

$\neg \exists x F(x) \equiv \neg (F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n))$
 $\equiv \neg F(a_1) \wedge \neg F(a_2) \wedge \dots \wedge \neg F(a_n)$
 $\equiv \forall x \neg F(x)$

離散数学5

12

5.6 $\forall$ と $\rightarrow$ を組み合わせた論理式(2)

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

任意の x に対して, $F(x)$ が真ならば $G(x)$ も真である

$\neg \forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \equiv \neg \forall x (\neg F(x) \vee G(x))$
 $\equiv \exists x \neg (\neg F(x) \vee G(x))$
 $\equiv \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ が成り立たない(偽である)ことを示すには,
 $F(x)$ は真であるが $G(x)$ は偽である x が存在することを示す.

離散数学5

12