

6 関係

離散数学第6回講義

離散数学6

1

6.1 直積集合 (direct product)

X, Y : 集合

$X \times Y$: X と Y の直積集合 (デカルト積, Cartesian product)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

(x, y) : 順序対 (ordered pair) $x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$

一般形: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$: n 項組 (n tuple)

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ 個}} = X^n$$

離散数学6

2

6.2 関係 (relation)

R : X と Y の間の関係 (X, Y : 集合)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} R \subseteq X \times Y$$

R : $X_1, X_2, \dots, X_n$ 間の関係

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} R \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

R : X 上の2項関係 (binary relation)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} R \subseteq X \times X$$

R : X 上の n 項関係

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} R \subseteq \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ 個}}$$

注1: $(a, b) \in R$ であることを $a R b$ で表す (中置記法)

注2: $(a, b) \notin R$ であることを $a \not R b$ で表す

離散数学6

3

N 上の2項関係の具体例

例1) 大小関係 $\leq$

$$\begin{array}{c} N \times N \\ \parallel \\ \left\{ \begin{array}{ccc} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 0), (2, 1), (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{ccc} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ & (1, 1), (1, 2), \dots \\ & & (2, 2), \dots \\ & & & \ddots \end{array} \right\} \end{array}$$

注1: $(1, 2) \in \leq$ であるから, $1 \leq 2$

注2: $(1, 0) \notin \leq$ であるから, $1 \not\leq 0$

離散数学6

4

N 上の2項関係の具体例

例2) $a \mid b \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} a$ は b を割り切る

($\exists k \in N$ (s.t. $b \div a = k$))

ther exists such that

$$\begin{array}{c} N \times N \\ \parallel \\ \left\{ \begin{array}{ccc} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 0), (2, 1), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 1), (3, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{ccc} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 0), (2, 1), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 1), (3, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \end{array}$$

注: X 上の2項関係は全部で何個?

離散数学6

5

6.3 2項関係の性質

R : X 上の2項関係

R : 反射的 (reflexive)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \in X, x R x \quad ((x, x) \in R)$$

例) $\leq$ は反射的

$\mid$ は反射的でない

$$\begin{array}{c} \leq \\ \parallel \\ \left\{ \begin{array}{ccc} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mid \\ \parallel \\ \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 0), & (2, 2), & \dots \\ (3, 0), & & (3, 3), \dots \\ \vdots & & \ddots \end{array} \right\} \end{array}$$

反例: $0 \mid 0$ でない ($(0, 0) \notin \mid$)

注: $\mid$ が $N - \{0\}$ 上の2項関係ならば反射的

離散数学6

6

6.3 2項関係の性質(続き)

R : 対称的 (symmetric)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x, \forall y \in X, x R y \rightarrow y R x$$

$$((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$$

例) $\leq$ は対称的でない | も対称的でない

$$\leq = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad | \quad = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 0), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 3), \dots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$\frac{0 \leq 2 \rightarrow 2 \leq 0}{1 \quad 0} \quad 0 \leq 2 \text{ であるが } 2 \leq 0 \text{ ではない}$$

反例

離散数学6

7

6.3 2項関係の性質(続き)

R : 反対称的 (antisymmetric)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x, \forall y \in X, x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$$

$$((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y)$$

例) $\leq$ は反対称的 | も反対称的

$$\leq = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad | \quad = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 0), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 3), \dots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$\frac{0 \leq 1 \wedge 1 \leq 0 \rightarrow 0 = 1?}{1 \quad 0} \quad \frac{0 \leq 0 \wedge 0 \leq 0 \rightarrow 0 = 0?}{1 \quad 1 \quad 1}$$

離散数学6

8

6.3 2項関係の性質(続き)

R : 推移的 (transitive)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x, \forall y, \forall z \in X, x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$$

$$((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$$

例) $\leq$ は推移的 | も推移的

$$\leq = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad | \quad = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 0), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 3), \dots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$$

$$x | y \wedge y | z$$

$$\Rightarrow y/x = k \wedge z/y = m \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow z/x = mk \Rightarrow x | z$$

離散数学6

10

6.3 2項関係の性質(続き)

R : 比較可能 (comparable)

$$\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x, \forall y \in X, x R y \vee y R x$$

$$((x, y) \in R \vee (y, x) \in R)$$

例) $\leq$ は比較可能 | は比較可能でない

$$\leq = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots \\ (1, 1), (1, 2), \dots \\ (2, 2), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad | \quad = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 0), (2, 2), \dots \\ (3, 0), (3, 3), \dots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$\forall x, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y \vee y \leq x$$

$$2 | 3 \text{ でも } 3 | 2 \text{ でもない}$$

離散数学6

11

6.4 推移閉包 (transitive closure)

2項関係 R に必要最小限の要素を加えることによって、推移性を満たすように拡張した関係

$R = \{ (a, b), (b, c), (c, d) \}$ 推移的でない

$$R^+ : R \text{ の推移閉包}$$

$$R^+ = R \cup \{ (a, c), (b, d), (a, d) \}$$

$$R^* : R \text{ の反射的推移閉包 (reflexive transitive closure)}$$

$$\text{反射性まで満たすように拡張した関係}$$

$$R^* = R^+ \cup \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \}$$

離散数学6

12

(反射的) 推移閉包の具体例

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1), \\ (1, 2), \\ (2, 3), \\ (3, 4), \dots \end{array} \right\}$$

$$P_1^* = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), \dots \\ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4), \dots \\ (3, 3), (3, 4), \dots \\ \vdots \end{array} \right\} = \leq$$

離散数学6

13