7　重要な2項関係

離散数学第7回講義

7．1　半順序関係

R : X 上の半順序 (partial ordering)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ R : 反射的かつ反対称的かつ推移的2項関係

例) $\leq$ は N 上の半順序　　$|$ は $N-\{0\}$ 上の半順序

$\subseteq$ は 2^X 上の半順序

$\forall A \in 2^X,\ A \subseteq A$ (反射的)

$\forall A, \forall B \in 2^X,\ A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (反対称的)

$\forall A, \forall B, \forall C \in 2^X,$

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C$

$\Rightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall y (y \in B \rightarrow y \in C)$

$\Rightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$　　(推移的)

7．2　半順序集合における諸概念

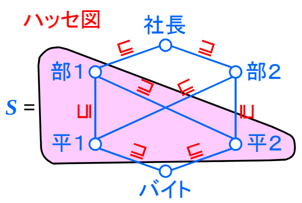
$\sqsubseteq$: X 上の半順序, $S \subseteq X$　$(X, \sqsubseteq)$: 半順序集合

X = { 社長, 部長1, 部長2, 平社員1, 平社員2, アルバイト }

$\sqsubseteq$ = { (バイト, 平1), (バイト, 平2), (平1, 部1), (平1, 部2), (平2, 部1), (平2, 部2), (部1, 社長), (部2, 社長) }*

S = { 部長1, 平社員1, 平社員2 }

*反射的推移閉包



上界と最大元

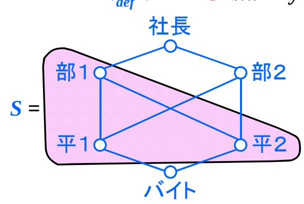
$\sqsubseteq$: X 上の半順序, $S \subseteq X$　$(X, \sqsubseteq)$: 半順序集合

S の上界 (upper bound)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in X$ s.t. $\forall y \in S,\ y \sqsubseteq x$

S の最大元 (greatest element)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in S$ s.t. $\forall y \in S,\ y \sqsubseteq x$　max S で表す



S の上界:
社長, 部1

S の最大元:
部1

下界と最小元

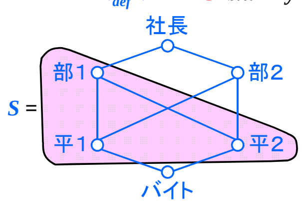
$\sqsubseteq$: X 上の半順序, $S \subseteq X$　$(X, \sqsubseteq)$: 半順序集合

S の下界 (lower bound)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in X$ s.t. $\forall y \in S,\ x \sqsubseteq y$

S の最小元 (least element)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in S$ s.t. $\forall y \in S,\ x \sqsubseteq y$　min S で表す



S の下界:
バイト

S の最小元:
無し

上限と下限

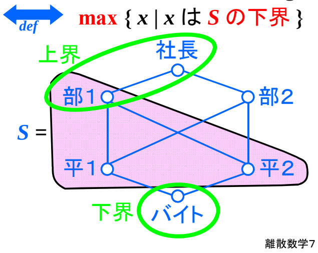
$\sqsubseteq$: X 上の半順序, $S \subseteq X$　$(X, \sqsubseteq)$: 半順序集合

S の上限(最小上界) (least upper bound, supremum)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ min { x | x は S の上界 }　lub S で表す

S の下限(最大下界) (greatest lower bound, infimum)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ max { x | x は S の下界 }　glb S で表す



S の上限 = min{ S の上界}
= min{社長, 部1} :
部1

S の下限 = max{ S の下界}
= max{バイト} :
バイト

極大元と極小元

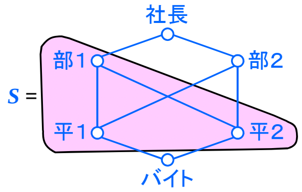
S の極大元 (maximal element)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $x \in S$ s.t. $\forall y \in S,\ x \not\sqsubset y$

$x \sqsubset y \overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def} x \sqsubseteq y$ かつ $x \neq y$　　$x \not\sqsubset y \overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def} x \not\sqsubseteq y$ または $x = y$

S の極小元 (minimal element)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $x \in S$ s.t. $\forall y \in S,\ y \not\sqsubset x$



S の極大元：
部1

S の極小元：
平1, 平2

最大元（最小元，上限，下限）の性質

$(X, \sqsubseteq)$：半順序集合　$S \subseteq X$

定理：S の最大元（最小元，上限，下限）は，

存在するならば唯一である.

7．3　束 (lattice)

$(X, \sqsubseteq)$：束

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $\forall x, y \in X,\quad \exists\, \mathrm{lub}\{x, y\} \wedge \exists\, \mathrm{glb}\{x, y\}$

7．4　同値関係

R：X 上の同値関係 (equivalence relation)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ R：反射的かつ対称的かつ推移的2項関係

例）$\equiv_k$: Z 上の2項関係 ($k \in N - \{0\}$)

$x \equiv_k y \overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def} \exists \ell \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell$

「$x \equiv y \bmod k$」(x と y は k を法として合同)

$\forall x \in Z,\ x - x = k \cdot 0 \quad \therefore\ x \equiv_k x$　（反射的）

$\forall x, \forall y \in Z,\ x \equiv_k y \Rightarrow \exists \ell \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell$

$\Rightarrow \exists -\ell \in Z$ s.t. $y - x = k \cdot (-\ell)$

$\Rightarrow y \equiv_k x$　（対称的）

7．4　同値関係

R：X 上の同値関係 (equivalence relation)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ R：反射的かつ対称的かつ推移的2項関係

$x \equiv_k y \overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def} \exists \ell \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell$

$\forall x, \forall y, \forall z \in Z,\ x \equiv_k y \wedge y \equiv_k z$

$\Rightarrow \exists \ell_1 \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell_1 \ \wedge$

$\exists \ell_2 \in Z$ s.t. $y - z = k \cdot \ell_2$

$\Rightarrow \exists \ell_1, \ell_2 \in Z$ s.t. $x - z = k \cdot (\ell_1 + \ell_2)$

$\Rightarrow x \equiv_k z$　（推移的）

$\equiv_k$ は Z 上の同値関係