7．4 同値関係

R：X 上の同値関係 （equivalence relation）

$\overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}}$ R：反射的かつ対称的かつ推移的2項関係

$x \equiv_k y \underset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \ell \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell$

$\forall x \in Z,\ x \equiv_k x$ （反射的）

$\forall x, \forall y \in Z,\ x \equiv_k y \Rightarrow y \equiv_k x$ （対称的）

$\forall x, \forall y, \forall z \in Z,\ x \equiv_k y \land y \equiv_k z \Rightarrow x \equiv_k z$ （推移的）

7．5 同値関係における重要な概念

R：X 上の同値関係

$[x]_R$：x（$\in X$）の R に関する同値類

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $[x]_R = \{ y \mid y \in X,\ x\,R\,y \}$

代表元

X/R: X の R に関する商集合

（X の R による分割）

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$

注: R は反射的であるから, $\forall x \in X,\ x \in [x]_R$

同値類と商集合の例

$[x]_R = \{ y \mid y \in X,\ x\,R\,y \}$ $X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$

$\forall x, y \in Z,\ x \equiv_k y \underset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \ell \in Z$ s.t. $x - y = k \cdot \ell$

例） $\equiv_2$：2 を法とする合同関係

$[3]_{\equiv 2} = \{ \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots \} = \{ 2n+1 \mid n \in Z \}$

$[2]_{\equiv 2} = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \} = \{ 2n \mid n \in Z \}$

$[1]_{\equiv 2} = \{ \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots \} = \{ 2n+1 \mid n \in Z \}$

$Z/\equiv_2 = \{ \ldots, [-2]_{\equiv 2}, [-1]_{\equiv 2}, [0]_{\equiv 2}, [1]_{\equiv 2}, [2]_{\equiv 2}, \ldots \}$

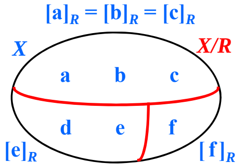
$= \{ \{ 2n \mid n \in Z \}, \{ 2n+1 \mid n \in Z \} \}$

商集合（分割）のイメージ

$X = \{ a, b, c, d, e, f \}$

$R = \{$ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), 反射的
(a, b), (b, c), (a, c),
(b, a), (c, b), (c, a),
(d, e), (e, d) $\}$
$\}$ 対称的 かつ 推移的

$[a]_R = [b]_R = [c]_R$ $\{ \{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\} \}$



$X/R = \{ [a]_R, [d]_R, [f]_R \}$

$[a]_R \cup [d]_R \cup [f]_R = X$

$[a]_R \cap [d]_R = \phi$

$[d]_R \cap [f]_R = \phi$

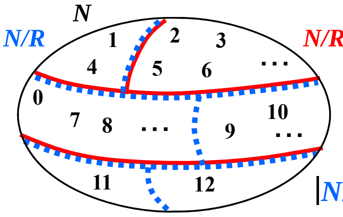
$[a]_R \cap [f]_R = \phi$

同値関係の細かさ（粗さ）

R, R'：X 上の同値関係

R は R' よりも細かい（R' は R よりも粗い）

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in X,\ x\,R\,y \Rightarrow x\,R'\,y$



$|N/R| \geqq |N/R'|$

8 関数

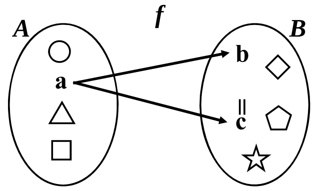
離散数学第8回講義

8．1　関数（function）

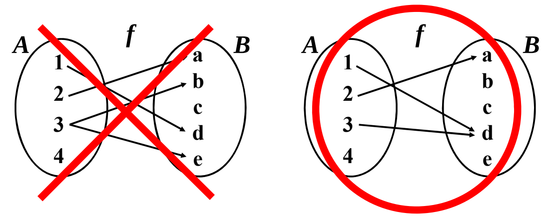
A, B：集合

f：A から B への関数　（写像，mapping）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} f: A, B \text{ 間の関係 } (f \subseteq A \times B) \\ \forall a \in A,\ (a, b) \in f \land (a, c) \in f \rightarrow b = c \end{cases}$



8．1　関数（function）



$(a, b) \in f$ を $f(a) = b$ で表す

$\begin{array}{ccc} f: A & \rightarrow & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f: a & \mapsto & b \end{array}$

f は A から B への関数である

a に b が対応付けられている

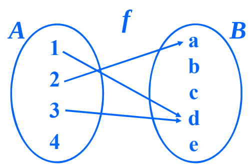
$f: A \rightarrow B$ の定義域と値域

f の定義域（domain）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Dom(f) = \{ a \mid a \in A,\ (a, b) \in f \}$

f の値域（range）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Ran(f) = \{ b \mid b \in B,\ (a, b) \in f \}$



$Dom(f) = \{ 1, 2, 3 \}$

$Ran(f) = \{ a, d \}$

8．2　全域関数と部分関数

$f: A \rightarrow B$

f：全域関数（total function）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Dom(f) = A$

f：部分関数（partial function）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Dom(f) \subseteq A$

例）$f: N \rightarrow N$　$f = \{ (0, 0),\ (1, 1),\ (4, 2),\ (9, 3),\ (16, 4), \dots \}$

　　$f: n \mapsto \sqrt{n}$　$(2, \sqrt{2}) \notin f$　$(3, \sqrt{3}) \notin f \cdots$

$Dom(f) = \{ m^2 \mid m \in N \} \subsetneq N$　部分関数（全域的ではない）

8．3　関数に関する用語

$f: A \rightarrow B$

f：全射（surjection）（上への関数，onto）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Ran(f) = B$

f：単射（injection）（1対1の関数，one to one）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a, \forall b \in Dom(f),\ a \neq b \ \Rightarrow\ f(a) \neq f(b)$

f：全単射（bijection）

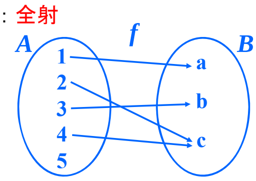
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f：全射 かつ 単射

f：1対1対応（one to one correspondence）

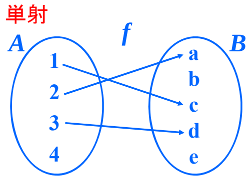
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f：全域的全単射

8．3　関数に関する用語

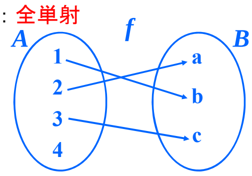
f：全射



f：単射



f：全単射



f：1対1対応