

9 有限集合と無限集合

離散数学第9回講義

離散数学9

3

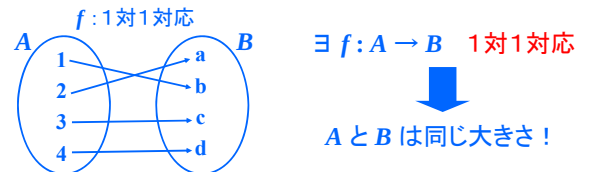
集合の大きさ

$\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ と N ではどちらが大きい？

$\{2n \mid n \in N\}$ と N ではどちらが大きい？

$\{2n \mid n \in N\}$ と $\{2n+1 \mid n \in N\}$ では？

N と Z (Q , R) ではどちらが大きい？



離散数学9

4

9.1 基数(cardinal number)

A, B : 集合

$|A|$: 集合 A の基数 (濃度)

注1: 直観的には集合の大きさを測る尺度

注2: 2進数とか16進数とかの基数(radix)とは別物

$|A| = |B|$

$\xLeftrightarrow{\text{def}} \exists f: A \rightarrow B \quad 1 \text{ 対 } 1 \text{ 対応}$

離散数学9

5

9.2 基準となる集合(自然数)

$s(A)$: 集合 A の後者(successor)

$\xLeftrightarrow{\text{def}} s(A) = A \cup \{A\}$

N : 自然数全体

$\xLeftrightarrow{\text{def}} \begin{cases} (1) \phi \in N \\ (2) n \in N \Rightarrow s(n) \in N \\ (3) (1), (2) \text{ で定義されるものだけが } N \text{ の要素} \end{cases}$

離散数学9

6

集合による自然数の定義

$0 = \phi \in N \quad s(A) = A \cup \{A\}$

$1 = s(\phi) = \phi \cup \{\phi\} = \{\phi\} \in N$

$2 = s(\{\phi\}) = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} = \{\phi, \{\phi\}\} \in N$

$3 = s(\{\phi, \{\phi\}\}) = \{\phi, \{\phi\}\} \cup \{\{\phi, \{\phi\}\}\} \\ = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \in N$

$\vdots$

離散数学9

7

集合による自然数の定義

$0 = \phi$

$1 = s(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = s(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$
 $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

各自然数 $n \in N$ の基数を n で表す

$|n| = |\{0, 1, 2, \dots, n-1\}| = n$

自然数全体 N の基数を $\aleph_0$ (アレフ0) で表す

$|N| = |\{0, 1, 2, \dots\}| = \aleph_0$

離散数学9

8

9.3 基数の大小

$$|A| \leq |B|$$

$\xleftrightarrow{\text{def}} \exists S \subseteq B \text{ s.t. } |S| = |A|$

例) $1 = |1| = |\{\emptyset\}| \leq |\{\emptyset\}| = |1| = 1$

$$1 = |1| = |\{\emptyset\}| \leq |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = |2| = 2$$

$$|A| < |B|$$

$\xleftrightarrow{\text{def}} |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$

例1) $|N| < |R|$

次回証明

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < |R| < \dots ?$$

9.3 基数の大小(整数全体)

例2) $|Z| = |N| = \aleph_0$

$$f: N \rightarrow Z$$

$$f: n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定義すると f は1対1対応

$$\begin{array}{cccccc} N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \end{array}$$

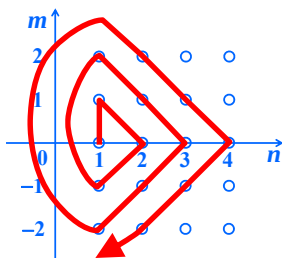
9.3 基数の大小(有理数全体)

例3) $|Q| = |N| = \aleph_0$

$$\frac{m}{n} \quad m \in Z, n \in N - \{0\}$$

$$f: N \rightarrow Q$$

$f: k \mapsto k$ 番目の
格子点



9.4 有限集合と無限集合

有限集合: ある $n \in N$ と同じ基数をもつ集合
finite set

無限集合: 有限でない集合
infinite set

可算無限集合: N と同じ基数をもつ集合

非可算無限集合: 可算でない無限集合

可算集合: 有限集合 or 可算無限集合

9.4 有限集合と無限集合

有限集合: ある $n \in N$ と同じ基数をもつ集合

可算無限集合: N と同じ基数をもつ集合

非可算無限集合: それ以外

注1: 有限集合 A は $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ と1対1対応がある.

A の要素を $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ と書き並べることができる.

注2: 可算無限集合 A は $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ と1対1対応がある.

A の要素を $x_0, x_1, x_2, \dots$ と書き並べることができる.

注3: 非可算無限集合の場合は書き並べることができない.

「 $1 \leq x \leq 2$ なるすべての実数を $x_0, x_1, x_2, \dots$ とすると...

9.4 有限集合と無限集合(続き)

定理1.1.2: 可算個の有限集合の和は可算集合

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,n_0-1}\} & A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots = \\ A_1 &= \{a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1-1}\} & \{a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,n_0-1}, \\ A_2 &= \{a_{2,0}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n_2-1}\} & a_{1,n_0}, a_{1,n_0+1}, \dots, a_{1,n_0+n_1-1}, \\ &\dots & a_{2,n_0+n_1}, a_{2,n_0+n_1+1}, \dots, a_{2,n_0+n_1+n_2-1}, \dots \end{aligned}$$

定理1.1.3: 可算個の可算集合の和は可算集合

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \dots\} & A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots = \\ A_1 &= \{a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots\} & \{a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots\} \\ A_2 &= \{a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots\} & \\ &\dots & \end{aligned}$$

定理1.1.4: 可算集合の部分集合は可算集合